Çalışma Soruları - 2

Seviye ve Konular:

1. Sev: Olasılık ve İstatistik
2. Sev: Risk Analizi ve Aktüeryal Modelleme

Örnek Soru - Joint Distributions

Y rassal değişkeni, bir call center'a gelen aramalar sonucunda yapılan satışların miktarını; X rassal değişkeni ise öğleden sonra 14:00 ile 16:00 arasında gelen aramaların adedini göstermektedir. X ve Y'nin ortak olasılık dağılım fonksiyonu $y > 0,\ x = 0, 1, 2, ...$ için

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{(2y)^x}{x!} e^{-3y}$$

olarak veriliyor. Bu durumda aşağıdakileri bulunuz.

$a)\ P(X = 0)$ [Hiç arama gelmemesi]
$b)\ P(Y > 2)$ [Gelen aramalarda yapılan satışların en az 2 birim tutarında olması]

Çözüm:

$a)\ X = 0$ iken tüm Y değerleri üzerinden toplatmak yani marjinalize etmek gerekir.

$$P(X = 0) = \int_0^{oo} e^{-3y} dy = \frac{e^{-3y}}{-3}\Bigg]_0^{oo} = 1/3.$$

$b)$ Bu sefer de tüm ayrık X değerleri üzerinden marjinalize edilmeli ve Y için ilgili sınırlar kullanılmalıdır.

$$P(Y > 2) = \int_2^{oo} \sum_{x=0}^{oo} f(x, y)\, dy = \int_2^{oo} \sum_{x=0}^{oo} \frac{(2y)^x}{x!} e^{-3y}\, dy$$

Burada $e^x = \sum_{n=0}^{oo} x^n$ eşitliği, yani e^x'in Maclaurin açılımı kullanılır.

O halde:

$$\sum_{x=0}^{oo} \frac{(2y)^x}{x!} = e^{2y} \text{ ve}$$

$$\mathrm{P}(Y > 2) = \int_2^{oo} e^{2y}\, e^{-3y} dy = -e^{-y}]_2^{oo} = e^{-2} = 0.1353.$$