

Sigorta Matematiği Tekrar 1: Rezerv

S1. Hayat – Prim Hesaplama

(x) yaşındaki bir kişi için özel bir tam sürekli hayat sigortasında primler denklik prensibi kullanılarak belirlenecektir. Ölüm tazminatı $b_t = (1 + i)^t$ şeklindedir ve ölüm anında verilecektir. L ; $t = 0$ anındaki hasarı, T ise (x)'in gelecekteki yaşam süresini gösteren rassal değişkenler ise L 'nin modelini oluşturunuz.

Çözüm:

$$b_t \bar{A}_x = \int_0^{\infty} (1 + i)^t v^t f_x(t) dt = \int_0^{\infty} f_x(t) dt = 1$$

Denklik Prensibi: $1 = P \bar{a}_x$ ise $P = 1/\bar{a}_x$

O halde:

$$L = (1 + i)^T v^T - \frac{1}{\bar{a}_x} \bar{a}_{\overline{T}|} = 1 - \frac{1}{\bar{a}_x} \frac{1 - v^T}{\delta} = 1 - \frac{1 - v^T}{1 - \bar{A}_x} = \frac{v^T - \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}$$

S2. Hayat – Rezerv

(45) yaşındaki bir kişi için düzenlenen tam kesikli ve 2000 TL tazminatlı hayat sigortasında aşağıdaki bilgiler verilmiştir:

- Brüt primler denklik prensibi kullanılarak hesaplanmıştır.
- $A_{45} = 0.15161$, $A_{55} = 0.23524$
- Masraflar her yılın başında ödenmek üzere aşağıdaki tabloda belirtildiği gibidir

	Primin %'si	Her 1000 TL'de	Her Poliçe için
İlk yıl	25%	1.5	30
Yenileme yıllarında	5%	0.5	10

Faiz oranı %5 ise 10. yıl sonundaki masraf rezervini (expense reserve) hesap ediniz.

Çözüm:

Önce anüite katsayıları:

$$\ddot{a}_{45} = \frac{1 - A_{45}}{d} = \frac{1 - 0.15161}{0.04761} = 17.8162, \quad \ddot{a}_{55} = \frac{1 - A_{55}}{d} = 16.0599$$

Brüt prim:

$$G\ddot{a}_{45} = 2000A_{45} + 0.05G\ddot{a}_{45} + 0.2G + \left(0.5 \cdot \frac{2000}{1000} + 10\right)\ddot{a}_{45} + \left(1 \cdot \frac{2000}{1000} + 20\right)$$

$$0.95G\ddot{a}_{45} - 0.2G = 2000A_{45} + 11\ddot{a}_{45} + 22$$

$$\text{ise } G = 31.16.$$

Net prim:

$$P\ddot{a}_{45} = 2000A_{45}$$

$$P = 17.02$$

10. yıldaki net prim rezervi:

$${}_{10}^nV = 2000A_{55} - (17.02)\ddot{a}_{55} = 197.14$$

10. yıldaki brüt prim rezervi:

$${}_{10}^gV = 2000A_{55} + \left[0.05(31.16) + 0.5 \cdot \frac{2000}{1000} + 10\right]\ddot{a}_{55} - 31.16\ddot{a}_{55} = 171.77$$

Masraf rezervi:

$$171.77 - 197.14 = -25.$$

S3. Hayat – Rezerv ve MCs

Bir sigorta firması kasko müşterilerini yıldan yıla Üstün (1. State), ve Standart (2. State) olmak üzere iki kategoride değerlendirmektedir. Her müşteri ilk sigortalandığında Standart kategori ile sisteme tanıtılmakta ve yeniden değerlendirme ancak yıl sonlarında yapılmaktadır. Geçiş (transition) olasılıklarını n . dönem ile $(n + 1)$. dönem arasında ve kategorilere göre veren matris şu şekildedir:

$$Q_n = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} + \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

A sürücüsü dördüncü yılın başında Standart kategoridedir. Şirket için; $k = 0,1$ olmak üzere, bir sigortalıyı $(4 + k)$ yılı sonundan bir sonraki yıl başına Standart kategoriden Üstün kategoriye geçirmek $10(1.1)^k$ gibi bir maliyete neden olmaktadır. Bu maliyet ise eğer müşteri 3. ve 4. yılda Standart kategorideyse yine 3. ve 4. yıllardan kendisinden P gibi bir prim alınarak karşılanmaktadır. Denklik prensibi esas alınarak $P = 3.1879$ hesaplanmış, teknik faiz ise %15 kabul edilmiştir. A sürücüsü 5. yıl başında hala Standart kategorideyse sigorta şirketinin tutması gereken rezervi hesaplayınız.

Çözüm:

$$Q_4^{2,1} [10(1.1)]v - 3.1879 = \left(0.4 + \frac{1}{4+1} (-0.2) \right) \frac{11}{1.15} - 3.1879 = 0.2555$$

S4. Hayat Dışı - Joint Distributions

Y rassal değişkeni, bir call center'a gelen aramalar sonucunda yapılan satışların miktarını; X rassal değişkeni ise öğleden sonra 14:00 ile 16:00 arasında gelen aramaların adedini göstermektedir. X ve Y 'nin ortak olasılık dağılım fonksiyonu $y > 0, x = 0, 1, 2, \dots$ için

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{(2y)^x}{x!} e^{-3y}$$

olarak veriliyor. Bu durumda aşağıdakileri bulunuz.

a) $P(X = 0)$ [Hiç arama gelmemesi]

b) $P(Y > 2)$ [Gelen aramalarda yapılan satışların en az 2 birim tutarında olması]

Çözüm:

a) $X = 0$ iken tüm Y değerleri üzerinden toplamak yani marjinalize etmek gerekir.

$$P(X = 0) = \int_0^{\infty} e^{-3y} dy = \left[\frac{e^{-3y}}{-3} \right]_0^{\infty} = 1/3.$$

b) Bu sefer de tüm ayrık X değerleri üzerinden marjinalize edilmeli ve Y için ilgili sınırlar kullanılmalıdır.

$$P(Y > 2) = \int_2^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} f(x, y) dy = \int_2^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(2y)^x}{x!} e^{-3y} dy$$

Burada $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ eşitliği, yani e^x 'in Maclaurin açılımı kullanılır.

O halde:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(2y)^x}{x!} = e^{2y} \text{ ve}$$

$$P(Y > 2) = \int_2^{\infty} e^{2y} e^{-3y} dy = \left[-e^{-y} \right]_2^{\infty} = e^{-2} = 0.1353.$$