

Poisson Dağılımı ve Üstel Dağılım

3 Soru – 3 Cevap

1. Tanımları ve Parametreleri Arasındaki İlişki
2. Poisson ve Üstel'in beraber kullanıldığı bir uygulama
3. MLE Örneği

Poisson Dağılımı:

$$N \sim \text{Pois}(\lambda) \quad \text{ise} \quad P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

N : Müşteri sayısı, hasta sayısı, hasar adedi vs...

Üstel Dağılım:

$$X \sim \text{Exp}(\theta) \quad \text{ise} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

X : Hasar büyüklüğü ve iki olay arasında geçen zaman

$$\lambda = \frac{1}{\theta} \quad \text{o halde}$$

$$X \sim \text{Exp}\left(\theta = \frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{ve} \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

S1. Hasarlar arasında geçen süre λ ortalama ile üstel dağılmaktadır. Sigortacının portföyünde benzer risklere sahip ve birbirinden bağımsız n adet poliçe bulunmaktadır. İlk hasarın ortaya çıkması için beklenen süre ne kadardır?

$$T \sim Exp(\lambda)$$

$$N \sim Pois\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

1 adet risk $\frac{1}{\lambda}$ sıklığı ile gözleniyorsa, n adet risk $\frac{n}{\lambda}$ sıklığı ile gözlenecektir. Bu nedenle ilk risk için beklenen süre, veya portföyde iki hasar arasında geçen beklenen süre $\frac{\lambda}{n}$ olacaktır.

S2. Hasar büyüklüğü, $X \sim Exp(\theta = 1000)$ ise

- i. Ortalama hasar büyüklüğü kadar bir prim uygulanırsa hasarların yüzde kaçlık değeri karşılanabilir?
- ii. Hasarların %50'sinin (medyan) karşılanabilmesi için uygulanacak en düşük prim kaç TL'dir?

i. $P(X < 1000) = F(1000) = 1 - e^{-\frac{1000}{1000}} = 1 - e^{-1} = 0.632$

ii. $P(X < K) = F(K) = 1 - e^{-\frac{K}{1000}} = 0.5$

$$\ln(0.5) = -\frac{K}{1000} \rightarrow K = 693.15 \text{ TL.}$$

S3. Bir bölgede tek bir deprem olduğunda oluşabilecek hasarların tutar $\theta = 50$ milyon parametresiyle üstel dağılmaktadır. Aynı bölgede bir yıl içinde meydana gelebilecek deprem sayısı ise sabit bir parametreyle Poisson dağılımına uymaktadır. Son 60 yılda hasar tutarı 25 milyonu geçen 12 deprem gerçekleştiği bilinmektedir. Buna göre hasar tutar 100 milyonu geçen depremler arasında geçen ortalama süre kaç yıldır?

$$\begin{array}{llll} 60 \text{ yılda} & 25\text{MM} < & 12 \text{ deprem} \\ 1 \text{ yılda} & 25\text{MM} < & ? \text{ deprem} \end{array} \rightarrow \lambda_{25<} = 0.2 \text{ ort adet/yıl}$$

$$\lambda S(25) = \lambda_{25<}$$

$$\lambda e^{-\frac{25\text{MM}}{50\text{MM}}} = \lambda_{25<} = 0.2$$

$$\lambda = 0.3297$$

ortalama deprem adedi/yıl

O halde:

$$\lambda S(100) = \lambda_{100<}$$

$$\lambda e^{-\frac{100\text{MM}}{50\text{MM}}} = \lambda_{100<} = 0.04463$$

Hasarı 100 MM üzerinde olan iki deprem arasında geçen zaman üst(1/0.04463) ile dağılır. Dolayısıyla ortalama süre: 22.4 yıldır.