

**Poisson + Gamma => NB**  
**3 Soru - 3 Cevap**

1. Tanımlar ve Dağılımlar
2. Mix Dağılımlar
3. Örnekler

**Poisson Dağılımı:**

$$N \sim \text{Pois}(\lambda) \quad \text{ise} \quad P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$N$ : Müşteri sayısı, hasta sayısı, hasar adedi vs...

**Üstel Dağılım:**

$$X \sim \text{Exp}(\theta) \quad \text{ise} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$X$ : Hasar büyüklüğü ve iki olay arasında geçen zaman

**Gamma Dağılımı:**

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta) \quad \text{ise} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$X$ : Hasar büyüklüğü

## Mix Dağılımlar

$$\text{Pois}(\lambda) + \text{Exp}(\theta) = \text{Geo}(p) \quad p = \frac{1}{1+\theta}$$

$$\text{Pois}(\lambda) + \text{Gamma}(\alpha, \theta) = \text{NB}(r = \alpha, \beta = \theta) \quad p = \frac{1}{1+\beta}$$

**S1.** Hasar adetleri  $N$ , bir rassal değişken olan  $\lambda$  ortalama ile Poisson,  $\Lambda$  rassal değişkeni ise  $\theta$  ortalama ile üstel dağılmaktadır.

- i.  $E[N]$
- ii.  $\text{Var}[N]$
- iii.  $P(N=0)$
- iv.  $P(N=2)$

- i.  $E[N] = E[E[N | \Lambda]] = E[\Lambda] = \theta$
- ii.  $\text{Var}[N] = E[V[N | \Lambda]] + V[E[N | \Lambda]] = E[\Lambda] + V[\Lambda] = \theta + \theta^2$
- iii.  $P(N=0) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{\lambda}{\theta}} d\lambda = \frac{1}{1+\theta}$

$$N \sim \text{Geo}(\theta) \rightarrow P(N=0) = p = \frac{1}{1+\theta}$$

- iv.  $P(N=2) = q^2 p = \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^2 \frac{1}{1+\theta}$

**S2.** Hasar adetleri  $N$ , bir rassal değişken olan  $\lambda$  ortalama ile Poisson,  $\Lambda$  rassal değişkeni ise *Gamma*  $(\alpha, \theta)$  dağılımını izlemektedir.

- i.  $E[N]$
- ii.  $\text{Var}[N]$
- iii.  $P(N=0)$
- iv.  $P(N=2)$

i.  $E[N] = E[E[N | \Lambda]] = E[\Lambda] = \alpha\theta$

ii.  $\text{Var}[N] = E[V[N | \Lambda]] + V[E[N | \Lambda]] = E[\Lambda] + V[\Lambda] = \alpha\theta + \alpha\theta^2$

iii.  $P(N=0) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\theta}}}{\theta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} d\lambda = \binom{r+k-1}{k} \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r$

$$N \sim \text{NB}(r = \alpha, \beta = \theta) \rightarrow P(N=0) = p^r = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r$$

iv.  $P(N=2) = \binom{r+2-1}{2} \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^2 \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r$

**S3.** Hasar adetleri  $\lambda$  ortalama ile Poisson dağılmakta, önsel (prior) dağılım ise  $\alpha = 1$  and  $\theta = 1.2$  parametreleriyle Gamma dağılmaktadır. Birinci yıl 3 hasar gözlenmiş fakat ikinci yıl herhangi bir hasar gözlenmemiştir. Bühlmann Kredibilite yöntemine göre üçüncü yıl için hasar sayısı tahminini bulunuz.

$$\mu = E[N] = E[E[N|\Lambda]] = E[\Lambda] = 1 \times 1.2 = 1.2$$

$$v = E[V[N|\Lambda]] = E[\Lambda] = 1 \times 1.2 = 1.2$$

$$a = V[E[N|\Lambda]] = V[\Lambda] = 1 \times 1.2^2 = 1.44$$

$$Z = \frac{n}{n+k} \quad k = \frac{v}{a} = \frac{1.2}{1.44}$$

$$Z = \frac{n}{n+k} = \frac{2}{2+0.833} = 0.7059$$

$$C_p = Z\bar{X} + (1-Z)\mu = 0.7059(1.5) + (1-0.7059)(1.2) = 1.41.$$