

Olasılık – Risk Analizi
Moment Üreten Fonksiyonlar (MGF)
3 Soru - 3 Cevap

MGF:

Kesikli r.d. $M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_i e^{tx_i} p(x_i)$

Sürekli r.d. $M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$

Genelleştirme:

$$M_{g(X)}(t) = E[e^{tg(X)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tg(x)} f(x) dx$$

Momentler:

$E[X^k]$: X 'in k . momenti (k^{th} moment of X)

Ör:

Birinci moment > beklenen değer

İkinci moment > varyans için ilk parça $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

MGF'in Kullanımı:

$$\frac{d[M_X(t)]}{dt} = E\left[\frac{d(e^{tX})}{dt}\right] = E[Xe^{tX}]$$

$$>> E[Xe^{tX}]|_{t=0} = E[X]$$

Genelleştirme:

$$\frac{d^k[M_X(t)]}{dt^k} = E\left[\frac{d^k(e^{tX})}{dt^k}\right] = E[X^k e^{tX}]$$

$$>> E[X^k e^{tX}]|_{t=0} = E[X^k]$$

S1. Gelir rassal değişkeni X 'in moment üreten fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$M_X(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}$$

i. $P(X \leq 0) = ?$

ii. $Var(X)$

i.

$X=x$	-1	0	1
$P(X = x)$	1/4	1/2	1/4

$$P(X \leq 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

iii. $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - (0)^2 = \frac{1}{2}$

veya

$$\frac{d[M_X(t)]}{dt} \Big|_{t=0} = E \left[\frac{d(e^{tX})}{dt} \right] \Big|_{t=0} = E[Xe^{tX}] \Big|_{t=0} = E[X]$$

$$\frac{d[M_X(t)]}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} \Big|_{t=0} = 0 = E[X]$$

$$\frac{d^2[M_X(t)]}{dt^2} \Big|_{t=0} = E \left[\frac{d^2(e^{tX})}{dt^2} \right] \Big|_{t=0} = E[X^2e^{tX}] \Big|_{t=0} = E[X^2]$$

$$\frac{d^2[M_X(t)]}{dt^2} \Big|_{t=0} = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} = E[X^2]$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{2} - (0)^2 = \frac{1}{2}.$$

S2. Bağımsız oldukları düşünülen kasko ve yangın hasarlarına ait rassal değişkenler X ve Y olmak üzere bu değişkenlere ait mgf'ler sırasıyla $M_X(t) = (1 - 4t)^{-1}$ ve $M_Y(t) = (1 - 4t)^{-2}$ eşitlikleri ile veriliyor. Toplam hasar $Z = X + Y$ olarak tanımlanırken

- i. Z 'nin mgf'ini
- ii. Z 'nin dağılımı ve parametrelerini
- iii. Beklenen toplam hasarı ve toplam hasarın varyansını bulunuz.

i.
$$M_Z(t) = M_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX}e^{tY}] = E[e^{tX}]E[e^{tY}]$$
$$M_Z(t) = (1 - 4t)^{-1} \cdot (1 - 4t)^{-2} = (1 - 4t)^{-3}.$$

ii.
$$Z \sim \text{Gamma}(\alpha = 3, \theta = 4).$$

iii.
$$E[Z] = \alpha\theta = 12$$
$$\text{Var}[Z] = \alpha\theta^2 = 48.$$

S3. X ve Y bağımsız rassal değişkenlerinin ortak dağılımları için moment üreten fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor.

$$M_{X,Y}(t_1, t_2) = \frac{1}{3(1 - t_2)} + \frac{4}{3(2 - t_2)} e^{t_1}$$

$Var(X) = ?$

Y/X	0	1
Exp($\theta=1$)	1/3	0
Exp($\theta=0.5$)	0	2/3

0 halde

$$Var(X) = 1^2 \cdot \frac{2}{3} - \left(1 \cdot \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

Not:

$$M_X(t_1) = \frac{4}{3(2 - t_1)} e^{t_1}$$

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha = 1, \theta = 0.5, \gamma = 1)$$

$$E[X] = \alpha\theta + \gamma$$

$$Var[X] = \alpha\theta^2$$