

Olasılık – Risk Analizi
Beklenen Değer, Varyans, Kovaryans, Korelasyon Katsayısı
3 Soru - 3 Cevap

Beklenen Değer :

Kesikli: $E[X] = \mu = \sum_i x_i p(x_i)$

Sürekli: $E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

Genelleştirirsek:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Varyans :

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \sigma^2 \Rightarrow \begin{cases} Var(X) = \sum_i x_i^2 p(x_i) - [E[X]]^2, & \text{Kesikli} \\ Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [E[X]]^2, & \text{Sürekli} \end{cases}$$

Kovaryans:

X ve Y iki farklı rassal değişken olmak üzere, X ve Y 'nin kovaryansı:

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

*Not: eğer X ve Y bağımsız rassal değişkenler ise,

$$Cov(X, Y) = 0$$

Korelasyon Katsayısı:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

S1. Sağlık harcamalarına ait hasar rassal değişkeni X , iki kısımda ele alınmaktadır: hasar geręekleştğinde bildirilen hasar X_1 ve hasar düzeltme masrafları (işçilik gibi) X_2 . Dolayısıyla $X = X_1 + X_2$ 'dir ve bu iki rassal değişkenin varyans-kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Toplam maliyetin varyansını bulunuz.

$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) = 25 + 2 + 2(5) = 37$$

S2. Bir kasko poliçesinde muafiyet 1 (x10.000 TL) ve maksimum hasar ödemesi 5'tir. Kasko hasarlarının ortalaması 2 olan üstel dağılıma uyduğu bilinirken beklenen hasar ödemesini bulunuz.

Model: $Y_L = \min\{(X - 1)^+, 5\}$

Expected Loss:

$$E[Y_L] = \int_1^6 (x - 1)f(x)dx + \int_6^{\infty} 5f(x)dx$$

$$E[Y_L] = \int_1^6 (x - 1)\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx + \int_6^{\infty} 5\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx = -2e^{-3} + 2e^{1/2}.$$

S3. X ve Y birer rassal değişken olmak üzere bu değişkenlerin bileşik olasılık dağılımı aşağıda verilmiştir.

$f(x, y)$		y			$f_X(x)$
		1	2	3	
x	1	0.25	0.25	0	0.5
	2	0	0.25	0.25	0.5
$f_Y(y)$		0.25	0.5	0.25	1

X ve Y 'nin korelasyon katsayısı kaçtır?

$E[X]=3/2$, $E[Y]=2$, $V[X]=1/4$, $V[Y]=1/2$ 'dir.

$Cov(X, Y) = 1*(0.25) + 2*(0.25) + 4*(0.25) + 6*(0.25) - 3/2*2 = 1/4$

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} = 0.7071$$