Eğer $a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n$ ve $a_1 = 1/2$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin toplamı nedir?

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisi ile verilmiş fonksiyon olsun.

Bizim $f(1)$ değerini hesaplamamız gerekiyor.

$$(n+2)a_{n+1} = n \cdot a_n \implies (n+2)a_{n+1}x^{n+1} = n \cdot a_n x^{n+1}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} = x^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}_{f'(x)}$$

indeksleri kaydırdık

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)a_{n+1}x^{n+1} = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} (n+1)a_n x^n}_{g'(x)}$$

$$g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n+1} = x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$= x\left(-a_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)$$

$$g(x) = x\left(-\overset{1/2}{a_1} x + f(x)\right)$$

Yukarıdaki denklemi yeniden yazalım

$$g'(x) = x^2 f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(-\frac{x}{2} + f(x)\right)\right] = x^2 f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{x^2}{2} + x f(x)\right] = x^2 f'(x)$$

$$-x + f(x) + x f'(x) = x^2 f'(x)$$

$$-x + f(x) = (x^2 - x) f'(x)$$

Şimdi $x=1$ değerini verelim

$$-1 + f(1) = 0 \implies \boxed{f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1}$$