

**Itô's Lemma**  
**3 Soru - 3 Cevap**

- 1. ve 2. Sorular:** Itô's Lemma uygulamaları  
**3. Soru:** Itô's Lemma ve Sharpe Rasyosu

**S1.**

$$\int_0^t W_s dW_s$$

$W_t$  bir Standart Brown Hareketi ise  $W_t$  'ye bağlı bir fonksiyon, örneğin  $Y_t = W_t^2$ , Itô's Lemma'yı sağlar. Öyleyse:

$$dY_t = 2W_t dW_t + \frac{1}{2} 2dt$$

$$\frac{1}{2} (dY_t - dt) = W_t dW_t$$

olur.

Her iki tarafın integralini alırsak sonuç aşağıdaki şekilde çıkar.

$$\frac{1}{2} \int_0^t (dY_s - ds) = \frac{1}{2} (Y_t - t) = \frac{1}{2} (W_t^2 - t) = \int_0^t W_s dW_s$$

**S2.** Black-Scholes çerçevesinde  $B_t$  bir standart Brown hareketi olmak üzere  $Y_t = t^2 B_t^4$  şeklinde tanımlansın.  $Y_t$  sürecini çözüm kabul eden stokastik diferansiyel denklemi bulunuz.

$Y_t$ , Itô's Lemma'yı sağlar. O halde:

$$dY_t = d(t^2 B_t^4) = t^2 4B_t^3 dB_t + \frac{1}{2} t^2 12B_t^2 dB_t^2 + 2tB_t^4 dt$$

$$dY_t = (6t^2 B_t^2 + 2tB_t^4)dt + 4t^2 B_t^3 dB_t$$

$$dY_t = \left( 6tY_t^{1/2} + 2\frac{Y_t}{t} \right) dt + 4t^{1/2} Y_t^{3/4} dB_t$$

düzenlenirse:

$$dY_t = \left( 6(t^2 Y_t)^{1/2} + 2\frac{Y_t}{t} \right) dt + 4(t^{2/3} Y_t)^{3/4} dB_t$$

**S3.** Temettü ödemesi yapmayan iki varlık;  $X$  ve  $Y$  çin belirsizlik kaynağı  $W_t$ , tektir ve standart Brown hareketi izlemektedir. Varlıkların fiyatları ise aşağıdaki stokastik diferansiyel denklemleri takip etmektedir:

$$\frac{dX_t}{X_t} = 0.07dt + 0.12dZ_t$$

$$\frac{dY_t}{Y_t} = A dt + B dZ_t$$

$d[\ln Y_t] = \alpha dt + 0.085dZ_t$  eşitliği ve sürekli risksiz faiz oranının %4 olduğu verilmektedir.  $A$  sabitini bulunuz.

$Y_t$  bir geometrik Brown hareketi ve  $G_t = \ln Y_t$  fonksiyonu  $Y_t$ 'ye bağlı olduğundan  $G_t$  Itô's Lemma'yı sağlar. Yani;

$$d[\ln Y_t] = \frac{1}{Y_t} dY_t + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{Y_t^2} \right) (dY_t)^2$$

$$d[\ln Y_t] = A dt + B dZ_t - \frac{1}{2} B^2 dt$$

$$d[\ln Y_t] = \left( A - \frac{1}{2} B^2 \right) dt + B dZ_t$$

O halde  $B = 0.085$ .

Son olarak, aynı belirsizlik kaynağına sahip Geometrik Brown hareketlerinin Sharpe Rasyolarının eşit olmasından yararlanarak;

$$\frac{\mu_X - r}{\sigma_X} = \frac{\mu_Y - r}{\sigma_Y}$$

$$\frac{0.07 - 0.04}{0.12} = \frac{A - 0.04}{0.085}$$

$$A = 0.06125.$$